Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$F(y'', y', y, x) = 0$$

rozwiązanie: funkcja $y = y(x)$

Warunki początkowe:
$y_0 = y(x_0)$
$y'_0 = y'(x_0)$

Równania różniczkowe

Problem jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego

$$y'' = f(x, y, y')$$

Twierdzenie:
Jeśli funkcja $f(x, y, y')$ i jej pochodne cząstkowe f_y oraz $f_{y'}$ są ciągłe na obszarze $D \subset R^3$ oraz $(x_0, y_0, y_0') \in D$, to istnieje przedział $(x_0 - h, x_0 + h)$, w którym zagadnienie początkowe:

$$y'' = f(x, y, y'), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Równania różniczkowe

Przykład 1.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' = \cos 2x$$

Rozwiązanie:

$$y' = \int (\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 \cdot x + C_2$$

Rozwiązanie ogólne: $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 \cdot x + C_2$

UWAGA! Dwie dowolne stałe!

Równania różniczkowe

Przykład 1.cd.

Rozwiąż równanie różniczkowe: $y'' = \cos 2x$

z warunkami początkowymi: $y(0) = -1$ i $y'(0) = 3$

Rozwiązanie:
Otrzymaliśmy rozwiązanie ogólne: $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 \cdot x + C_2$
Wstawiamy warunki początkowe do rozwiązania ogólnego oraz jego pochodnej:

$$-1 = -\frac{1}{4}\cos(2 \cdot 0) + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$3 = \frac{1}{2}\sin(2 \cdot 0) + C_1$$

Stąd:

$$C_1 = 3$$

$$C_2 = -\frac{3}{4}$$

Rozwiązanie szczególne: $y = -\frac{1}{4}\cos 2x + 3x - \frac{3}{4}$

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe drugiego rzędu sprowadzalne do równania pierwszego rzędu

1. $F(x, y', y'') = 0$, nie występuje y

podstawienie: $y' = u(x)$

2. $F(y, y', y'') = 0$, nie występuje x

podstawienie: $y' = u(y)$

Równania różniczkowe

Przykład 2.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$x \cdot y'' - y' = 2x^3$$

Rozwiązanie:

W równaniu nie ma y, a więc stosujemy podstawienie:
$y' = u(x)$
Wtedy $y'' = u'(x)$
Równanie przybierze postać:

$$x \cdot u' - u = 2x^3$$

Dzielimy obie strony przez x:

$$u' - \frac{u}{x} = 2x^2$$

Otrzymujemy równanie liniowe pierwszego rzędu, które możemy rozwiązać metodą uzmienniania stałej.

Równania różniczkowe

$$u' - \frac{u}{x} = 2x^2$$

Rozwiązujemy rówanie jednorodne jako równanie o rozdzielonych zmiennych:

$$u' - \frac{u}{x} = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u| = \ln|x| + C_1$$

$$u = C \cdot x$$

Uzmienniamy stałą:

$$u = C(x) \cdot x$$

$$u' = C'(x) \cdot x + C(x) \cdot 1$$

Wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = 2x^2$$

$$C'(x) = 2x$$

Równania różniczkowe

$$C'(x) = 2x$$

$$C(x) = \int (2x)dx = x^2 + D_1$$

Otrzymujemy rozwiązanie równania liniowego:

$$u = x \cdot (x^2 + D_1)$$

$$u = x^3 + D_1 \cdot x$$

Ale stosowaliśmy podstawienie $y' = u$:

$$y' = x^3 + D_1 \cdot x$$

$$y = \int (x^3 + D_1 \cdot x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}D_1 \cdot x^2 + D_2$$

Zatem ogólne rozwiązanie rówania to:

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}D_1 \cdot x^2 + D_2$$

Równania różniczkowe

Przykład 3.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' - 2y' = 0$$

Rozwiązanie:

W równaniu nie ma x, zastosujemy podstawienie: $y' = u(y)$
Wtedy $y'' = u'(y) \cdot y' = u' \cdot u$
Równanie przybierze postać:

$$u' \cdot u - 2u = 0$$

$$u \cdot (u' - 2) = 0$$

Mamy więc dwa przypadki, albo:

$$u = 0$$

Wtedy:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = C$$

Drugi przypadek to:

$$u' - 2 = 0$$

$$\frac{du}{dy} = 2$$

$$du = 2dy$$

$$\int du = 2\int dy$$

$$u = 2y + C_1$$

Równania różniczkowe

Zastosowaliśmy podstawienie $y' = u$, zatem:

$$y' = 2y + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y + C_1$$

$$\frac{dy}{2y + C_1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{2y + C_1} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \ln |2y + C_1| = x + C_2$$

$$\ln |2y + C_1| = 2x + 2 \cdot C_2$$

$$2y + C_1 = e^{(2x + 2 \cdot C_2)}$$

$$y = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot e^{2 \cdot C_2} - \frac{1}{2} C_1$$

Możemy rozwiązanie zapisać:

$$y = D_2 e^{2x} + D_1$$

UWAGA: Warto zauważyć, że rozwiązanie to zawiera rozwiązanie $y = C$, które otrzymaliśmy rozpatrując pierwszy przypadek.

Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x)$$

$p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ - funkcje

$q(x) = 0$ - równanie jednorodne

$q(x) \neq 0$ - równanie niejednorodne

Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu jednorodne o stałych współczynikach

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = 0$$

$p_1, p_2 \in R$

Tworzymy **równanie charakterystyczne**:
$y'' \mapsto r^2$; $y' \mapsto r$; $y \mapsto 1$;

$$r^2 + p_1 \cdot r + p_2 = 0$$

Równania różniczkowe

$$r^2 + p_1 \cdot r + p_2 = 0$$

1. $\Delta > 0$**:** dwa pierwiastki rzeczywiste: r_1 i r_2
rozwiązania: $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$

2. $\Delta = 0$**:** jeden (podwójny) pierwiastek rzeczywisty: r
rozwiązania: $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$

3. $\Delta < 0$**:** dwa pierwiastki zespolone: $r_1 = a + bi$, $r_2 = a - bi$
rozwiązania: $y_1 = e^{ax}\cos(bx)$, $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$

rozwiązanie równania: $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Obliczamy Δ:

$$\Delta = 9 - 8 = 1 = 1^2$$

Zatem mamy dwa pierwiastki rzeczywiste równania charakterystycznego:

$$r_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Równania różniczkowe

Przykład 3.a.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' - 2y' = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 2r = 0$$

Tu nie musimy liczyć Δ:

$$r(r-2) = 0$$

Zatem mamy dwa pierwiastki rzeczywiste równania charakterystycznego:

$$r_1 = 0$$

$$r_2 = 2$$

Możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{2x}$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Równania różniczkowe

Przykład 5.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

Obliczamy Δ:

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

Zatem jeden pierwiastek rzeczywisty równania charakterystycznego:

$$r = \frac{2}{2} = 1$$

Możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

Równania różniczkowe

Przykład 6.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

Obliczamy Δ:

$$\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$$

Zatem mamy dwa pierwiastki zespolone równania charakterystycznego:

$$r_1 = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

$$r_2 = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

Oznaczamy: $a = 2$ oraz $b = 3$

Możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x)$$

Równania różniczkowe

Przykład 7.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' + y = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 1 = 0$$

Szukamy jego pierwiastków:

$$r^2 = -1$$

Zatem mamy dwa pierwiastki zespolone równania charakterystycznego:

$$r_1 = i$$

$$r_2 = -i$$

Oznaczamy: $a = 0$ oraz $b = 1$

Możemy zapisać rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y = C_1 e^{0 \cdot x} \cos x + C_2 e^{0 \cdot x} \sin x$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Równania różniczkowe

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = q(x)$$

Metoda uzmienniania stałych

$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$
gdzie:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x) \cdot q(x)}{W} dx$$

$$C_2(x) = \int \frac{y_1(x) \cdot q(x)}{W} dx$$

Wrońskian:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Józef Maria Hoene-Wroński (ur. 1776 Wolsztyn, zm. 1853) - polski matematyk, fizyk, filozof, ekonomista i prawnik

Równania różniczkowe

Przykład 8.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne: $y'' + 2y' + y = 0$

Tworzymy równanie charakterystyczne: $r^2 + 2r + 1 = 0$
Można je zapisać: $(r + 1)^2 = 0$

Równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty:$r = -1$

Zapisujemy rozwiązania równania jednorodnego:

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = xe^{-x}$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego będzie miało postać:

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$$

$C_1(x)$ i $C_2(x)$ wyznaczamy ze wzorów.

Równania różniczkowe

Najpierw liczymy wrońskian:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (e^{-x} - xe^{-x}) \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot (e^{-x} - xe^{-x}) - (-e^{-x}) \cdot xe^{-x} = e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{xe^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x}}{e^{-2x}}\, dx = -\int dx = -x + D_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{-x}}{x}}{e^{-2x}}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln|x| + D_2$$

Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = (-x + D_1) \cdot e^{-x} + (\ln|x| + D_2) \cdot xe^{-x}$$

$$y = D_1 e^{-x} + D_2 xe^{-x} - xe^{-x} + x \ln|x| \cdot e^{-x}$$

Równania różniczkowe

Przykład 9.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y'' + 9y = \sin(2x)$$

Rozwiązanie:

Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne: $y'' + 9y = 0$

Tworzymy równanie charakterystyczne: $r^2 + 9 = 0$
Można je zapisać: $r^2 = -9$

Równanie charakterystyczne ma dwa pierwiastki zespolone:$r_1 = 3i$ oraz $r_2 = -3i$
Przyjmujemy: $a = 0$ oraz $b = 3$.

Zapisujemy rozwiązania równania jednorodnego:

$$y_1 = \cos(3x)$$

$$y_2 = \sin(3x)$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego będzie miało postać:

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$$

$C_1(x)$ i $C_2(x)$ wyznaczamy ze wzorów.

Równania różniczkowe

Najpierw liczymy wrońskian:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \sin(3x) \\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3x) + 3\sin^2(3x) = 3(\cos^2(3x) + \sin^2(3x)) = 3$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin(3x)\cdot\sin(2x)}{3}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\left(\cos(x) - \cos(5x)\right)dx = -\frac{1}{6}(\sin x - \frac{1}{5}\sin(5x)) + D_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos(3x)\cdot\sin(2x)}{3}dxdx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{2}\left(\sin(5x) + \sin(-x)\right)dx = \frac{1}{6}(-\frac{1}{5}\cos(5x) + \cos(-x)) + D_2$$

Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = (-\frac{1}{6}(\sin x - \frac{1}{5}\sin(5x)) + D_1)\cdot\cos(3x) + (\frac{1}{6}(-\frac{1}{5}\cos(5x) + \cos(-x)) + D_2)\cdot\sin(3x)$$

$$y = D_1\cdot\cos(3x) + D_2\cdot\sin(3x) - \frac{1}{6}\sin x\cdot\cos(3x) + \frac{1}{30}\sin(5x)\cdot\cos(3x) - \frac{1}{30}\cos(5x)\cdot\sin(3x) + \frac{1}{6}\cos x\cdot\sin(3x)$$

$$y = D_1\cdot\cos(3x) + D_2\cdot\sin(3x) + \frac{1}{6}(\cos x\cdot\sin(3x) - \sin x\cdot\cos(3x)) + \frac{1}{30}(\sin(5x)\cdot\cos(3x) - \cos(5x)\cdot\sin(3x))$$

$$y = D_1\cdot\cos(3x) + D_2\cdot\sin(3x) + \frac{1}{6}\sin(2x) + \frac{1}{30}\sin(2x)$$

$$y = D_1\cdot\cos(3x) + D_2\cdot\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

Równania różniczkowe

Metoda przewidywania

$$y'' + p_1 \cdot y' + p_2 \cdot y = q(x)$$

Działa tylko jeśli $q(x)$ jest jedną z funkcji: $A \cdot e^{kx}$, $B \cdot \sin(kx)$, $C \cdot \cos(kx)$, $W(x)$, lub sumą bądź iloczynem funkcji tej postaci.

$$RORN = RORJ + RSRN$$

Metoda przewidywania

Metoda rozwiązywania:
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: y_o (RORJ).
2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$.
3. Obliczamy y_s' i y_s''.
4. Wstawiamy y_s, y_s' i y_s'' do równania niejednorodnego.
5. Obliczamy współczynniki w y_s (RSRN).
6. Zapisujemy rozwiązanie: $y = y_o + y_s$ (RORN).

Metoda przewidywania

UWAGI:

1. Rozwiązanie szczególne y_s nie może zawierać sie w rozwiązaniu ogólnym y_o. Gdyby miało się zawierać, mnożymy y_s przez x lub przez x^2.

2. Funkcje $\sin(kx)$ i $\cos(kx)$ w rozwiązaniu szczególnym y_s zawsze występują jednocześnie.

Równania różniczkowe

Przykład 9.a.

Rozwiąż równanie różniczkowe metodą przewidywania:

$$y'' + 9y = \sin(2x)$$

Rozwiązanie:

1. Rowiązujemy równanie jednorodne: $y'' + 9y = 0$

Tak jak wcześniej otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego:

$$y_o = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci co $q(x)$ uwzględniając Uwagę 2:

$$y_s = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

3. Obliczamy y_s' i y_s'':

$$y_s' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$

$$y_s'' = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

4. Wstawiamy y_s, y_s' i y_s'' do równania niejednorodnego:

$$(-4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)) + 9 \cdot (A\sin(2x) + B\cos(2x)) = \sin(2x)$$

5. Porównujemy współczynniki:
$\sin(2x)$: $-4A + 9A = 1$
$\cos(2x)$: $-4B + 9B = 0$
Stąd $A = \frac{1}{5}$ oraz $B = 0$

6. Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = y_o + y_s = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(2x)$$

Równania różniczkowe

Przykład 10.

Rozwiąż równanie różniczkowe metodą przewidywania:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 5x$$

Rozwiązanie:

1. Rowiązujemy równanie jednorodne: $y'' - 6y' + 9y = 0$

Tworzymy równanie charakterystyczne: $r^2 - 6r + 9 = 0$
Można je zapisać: $(r-3)^2 = 0$

Równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty: $r = 3$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego będzie miało postać:

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot xe^{3x}$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci co $q(x)$ uwzględniając Uwagę 1:

$$y_s = Ae^{3x} \cdot x^2 + Bx + D$$

3. Obliczamy y_s' i y_s'':

$$y_s' = 3Ae^{3x} \cdot x^2 + Ae^{3x} \cdot 2x + B$$

$$y_s'' = 9Ae^{3x} \cdot x^2 + 3Ae^{3x} \cdot 2x + 3Ae^{3x} \cdot 2x + Ae^{3x} \cdot 2$$

4. Wstawiamy y_s, y_s' i y_s'' do równania niejednorodnego:

$$(9Ae^{3x} \cdot x^2 + 12Ae^{3x} \cdot x + 2Ae^{3x}) - 6(3Ae^{3x} \cdot x^2 + 2Ae^{3x} \cdot x + B) + 9(Ae^{3x} \cdot x^2 + Bx + D) = e^{3x} + 5x$$

$$9Ae^{3x} \cdot x^2 + 12Ae^{3x} \cdot x + 2Ae^{3x} - 18Ae^{3x} \cdot x^2 - 12Ae^{3x} \cdot x + -6B + 9Ae^{3x} \cdot x^2 + 9Bx + 9D = e^{3x} + 5x$$

Równania różniczkowe

$$2Ae^{3x} - 6B + 9Bx + 9D = e^{3x} + 5x$$

5. Porównujemy współczynniki:
e^{3x}: $2A = 1$
x: $9B = 5$
1: $-6B + 9D = 0$
Stąd $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{5}{9}$ oraz $D = \frac{10}{27}$

6. Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = y_o + y_s = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{3x} + \frac{5}{9}x + \frac{10}{27}$$

Równania różniczkowe

Przykład 10.a.

Rozwiąż równanie różniczkowe metodą przewidywania:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + 5x$$

z warunkami poczatkowymi: $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$

Rozwiązanie:

Otrzymaliśmy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 \cdot xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{3x} + \frac{5}{9}x + \frac{10}{27}$$

Obliczamy jego pochodną:

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2 \cdot e^{3x} + 3C_2 \cdot xe^{3x} + \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{3x} + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot 3e^{3x} + \frac{5}{9}$$

Wstawiamy warunki początkowe:

$$3 = C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot e^{3\cdot 0} + \frac{5}{9} \cdot 0 + \frac{10}{27}$$

$$1 = 3C_1 e^{3\cdot 0} + C_2 \cdot e^{3\cdot 0} + 3C_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot 3e^{3\cdot 0} + \frac{5}{9}$$

Po uproszczeniu:

$$3 = C_1 + \tfrac{10}{27} \qquad\qquad 1 = 3C_1 + C_2 + \tfrac{5}{9}$$

Stąd obliczamy: $C_1 = \frac{71}{27}$ oraz $C_2 = -\frac{67}{9}$

Zapisujemy rozwiązanie szczególne:

$$y = \frac{71}{27} \cdot e^{3x} - \frac{67}{9} \cdot xe^{3x} + \frac{1}{2}x^2 e^{3x} + \frac{5}{9}x + \frac{10}{27}$$

Podobnie można rozwiązywać rownania wyższych rzędów:

Przykład 11.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^x$$

Rozwiązanie:

1. Rowiązujemy równanie jednorodne: $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Tworzymy równanie charakterystyczne: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$
Można je zapisać: $(r-1)^3 = 0$

Równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek rzeczywisty: $r = 1$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego będzie miało postać:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 \cdot xe^x + C_3 x^2 e^x$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci co $q(x)$ uwzględniając Uwagę 1:

$$y_s = Ae^x \cdot x^3$$

3. Obliczamy y_s', y_s'' oraz y_s'''
4. Wstawiamy y_s', y_s'' oraz y_s''' do równania niejednorodnego (wyrazy z dopisanym x skracają się).
5. Obliczamy $A = \frac{2}{3}$
6. Zapisujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego:

$$y = y_o + y_s = C_1 e^x + C_2 \cdot xe^x + C_3 x^2 e^x + \frac{2}{3} x^3 e^x$$

Równania różniczkowe

Przykład 12.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y''' + 3y'' + y' - 5y = 0$$

Rozwiązanie:

Tworzymy równanie charakterystyczne: $r^3 + 3r^2 + r - 5 = 0$

Rozkładamy wielomian na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne.
Zgadujemy pierwiastek

$$r_1 = 1$$

Równanie możemy przedstawić jako:

$$(r-1)(r^2 + 4r + 5) = 0$$

Rozwiązujemy równanie: $r^2 + 4r + 5 = 0$
Obliczamy $\Delta = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$
Obliczamy pierwiastki:

$$r_2 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

$$r_3 = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$

Przyjmujemy: $a = -2$ oraz $b = 1$
Zapisujemy rozwiązanie ogólne:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} \cos x + C_3 e^{-2x} \sin x$$