Równania różniczkowe

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$F(y', y, x) = 0$$

rozwiązanie: funkcja $y = y(x)$

Równania różniczkowe

Zagadnienie początkowe
Zagadnienie Cauchy'ego

Równanie: $F(y', y, x) = 0$
i warunek początkowy: $y_0 = y(x_0)$

Równania różniczkowe

Rozwiązanie ogólne: rodzina funkcji spełniających równanie.

Rozwiązanie szczególne: jedna funkcja spełniająca równanie i warunek początkowy.

Równania różniczkowe

Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

$p(x)$, $q(x)$ - funkcje

$q(x) = 0$ - równanie jednorodne

$q(x) \neq 0$ - równanie niejednorodne

Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu

równanie liniowe jednorodne jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

Równania różniczkowe

Przykład 1.
Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' + xy = 0$$

Rozwiązanie:

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

$$\frac{dy}{y} = -x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int x \cdot dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y = e^{(-\frac{1}{2}x^2 + C_1)}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{C_1}$$

$$y = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Równania różniczkowe

Ogólny schemat dla równania liniowego jednorodnego:

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

Rozwiązanie (rozdzielamy zmienne):

$$\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x) \cdot dx$$

$$\ln |y| = -\int p(x) \cdot dx$$

$$y = C \cdot e^{(-\int p(x) \cdot dx)}$$

Równania różniczkowe

Metoda uzmienniania stałej
dla równania liniowego niejednorodnego

Metoda rozwiązywania:
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne.
2. W rozwiązaniu równania jednorodnego przyjmujemy zamiast stałej C funkcję $C(x)$ (uzmienniamy stałą).
3. Obliczamy y'.
4. Wstawiamy y i y' do równania niejednorodnego.
(UWAGA: $C(x)$ musi się skrócić!)
5. Obliczamy $C'(x)$.
6. Obliczamy $C(x) = \int C'(x)dx$.
7. Zapisujemy rozwiązanie $y = y(x)$ wstawiając $C(x)$ do punktu 2.

Równania różniczkowe

Przykład 2.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' + xy = x$$

Rozwiązanie:

1. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' + xy = 0$
Jest to równanie, które rozwiązaliśmy jako Przykład 1. Otrzymaliśmy rozwiązanie:

$$y = C \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

2. Uzmienniamy stałą:

$$y = C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

3. Obliczamy y':

$$y' = C'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x$$

4. Wstawiamy y i y' do równania niejednorodnego:

$$\left(C'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2x\right) + x \cdot \left(C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right) = x$$

Po skróceniu:

$$C'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - x \cdot C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot C(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = x$$

$$C'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = x$$

Równania różniczkowe

5. Obliczamy $C'(x)$: $C'(x) = x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$

6. Obliczamy $C(x)$: $C(x) = \int x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1}{2}x^2 \\ dt = x \cdot dx \end{array} \right| = \int e^t \cdot dt = e^t + A = e^{\frac{1}{2}x^2} + A$

7. Zapisujemy rozwiązanie: $y = \left(e^{\frac{1}{2}x^2} + A \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

czyli:

$$y = 1 + Ae^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Równania różniczkowe

Przykład 2a.

To samo równanie można również rozwiązać rozdzielając zmienne:

$$y' + xy = x$$

Rozwiązanie:

$$y' = x - xy$$

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y)$$

$$\frac{dy}{1-y} = x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int x \cdot dx$$

$$-\ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\ln|1-y| = -\frac{1}{2}x^2 - C_1$$

$$1 - y = e^{(-\frac{1}{2}x^2 - C_1)}$$

$$y = 1 - Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Zatem niektóre równania można rozwiązywać kilkoma metodami.

Równania różniczkowe

Przykład 3.
Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 2x$$

z warunkiem początkowym:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

Rozwiązanie:

1. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \cdot dx$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1$$

$$y = e^{(\ln|\sin x| + C_1)}$$

$$y = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^{C_1}$$

$$y = C \cdot \sin x$$

Równania różniczkowe

2. Uzmienniamy stałą:

$$y = C(x) \cdot \sin x$$

3. Obliczamy y':

$$y' = C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x$$

4. Wstawiamy y i y' do równania niejednorodnego:

$$\left(C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x\right) - (C(x) \cdot \sin x) \cdot \operatorname{ctg} x = \sin 2x$$

Po skróceniu:

$$C'(x) \cdot \sin x + C(x) \cdot \cos x - C(x) \cdot \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \sin 2x$$

$$C'(x) \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$$

5. Obliczamy $C'(x)$: $C'(x) = 2 \cos x$

6. Obliczamy $C(x)$: $C(x) = 2 \int \cos x \cdot dx = 2 \sin x + A$

7. Zapisujemy rozwiązanie: $y = (2 \sin x + A) \cdot \sin x$
czyli:

$$y = A \sin x + 2 \sin^2 x$$

8. W tym zadaniu mamy podany warunek początkowy: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$
a więc musimy znaleźć rozwiązanie szczególne:

$$\sqrt{2} = A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} = A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$A \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$A = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

Zatem ostatecznie rozwiązanie zagadnienia ma postać:

$$y = (2 - \sqrt{2}) \cdot \sin x + 2\sin^2 x$$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' + 3y = \cos x$$

Równania różniczkowe

Przykład 4.
Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' + 3y = \cos x$$

Rozwiązanie:

1. Najpierw rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' + 3y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -3y$$

$$\frac{dy}{y} = -3dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -3 \int dx$$

$$\ln|y| = -3x + C_1$$

$$y = e^{(-3x+C_1)}$$

$$y = e^{-3x} \cdot e^{C_1}$$

$$y = C \cdot e^{-3x}$$

Równania różniczkowe

2. Uzmienniamy stałą:

$$y = C(x) \cdot e^{-3x}$$

3. Obliczamy y':

$$y' = C'(x) \cdot e^{-3x} + C(x) \cdot e^{-3x} \cdot (-3)$$

4. Wstawiamy y i y' do równania niejednorodnego:

$$\left(C'(x) \cdot e^{-3x} + C(x) \cdot e^{-3x} \cdot (-3)\right) + 3 \cdot \left(C(x) \cdot e^{-3x}\right) = \cos x$$

Po skróceniu:

$$C'(x) \cdot e^{-3x} - 3 \cdot C(x) \cdot e^{-3x} + 3 \cdot C(x) \cdot e^{-3x} = \cos x$$

$$C'(x) \cdot e^{-3x} = \cos x$$

5. Obliczamy $C'(x)$: $C'(x) = e^{3x} \cdot \cos x$

6. Obliczamy $C(x)$: $C(x) = \int e^{3x} \cdot \cos x \cdot dx = \frac{3}{10} e^{3x} \cos x + \frac{1}{10} e^{3x} \sin x + A$

7. Zapisujemy rozwiązanie: $y = \left(\frac{3}{10} e^{3x} \cos x + \frac{1}{10} e^{3x} \sin x + A\right) \cdot e^{-3x}$
czyli:

$$y = \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + Ae^{-3x}$$

Równania różniczkowe

Metoda przewidywania

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

Działa tylko jeśli $p(x) = p$ funkcja stała,
$q(x)$ jest jedną z funkcji: $A \cdot e^{kx}$, $B \cdot \sin(kx)$, $C \cdot \cos(kx)$, $W(x)$, lub sumą bądź iloczynem funkcji tej postaci.

$$RORN = RORJ + RSRN$$

RO - rozwiązanie ogólne
RS - rozwiązanie szczególne
RN - równanie niejednorodne
RJ - równanie jednorodne

Metoda przewidywania

Metoda rozwiązywania:
1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: $y_o = C \cdot e^{-px}$ (RORJ).
2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$.
3. Obliczamy y_s'.
4. Wstawiamy y_s i y_s' do równania niejednorodnego.
5. Obliczamy współczynniki w y_s (RSRN).
6. Zapisujemy rozwiązanie: $y = y_o + y_s$ (RORN).

Przykład 5.

Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe:

$$y' + 4y = x^3$$

Równania różniczkowe

Przykład 5.

Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe:

$$y' + 4y = x^3$$

Rozwiązanie:

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' + 4y = 0$

$$y_o = C \cdot e^{-4x}$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$:

$$y_s = Ax^3 + Bx^2 + Dx + E$$

3. Obliczamy y_s':

$$y_s' = 3Ax^2 + 2Bx + D$$

4. Wstawiamy y_s i y_s' do równania niejednorodnego:

$$(3Ax^2 + 2Bx + D) + 4 \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E) = x^3$$

5. Obliczamy współczynniki w y_s, układamy układ równań dla współczynników:
x^3: $4A = 1$, stąd $A = \frac{1}{4}$
x^2: $3A + 4B = 1$, stąd $B = -\frac{3}{16}$
x: $2B + 4D = -1$, stąd $D = \frac{3}{32}$
1: $D + 4E = 0$, stąd $E = -\frac{3}{128}$
6. Zapisujemy rozwiązanie:

$$y = y_o + y_s = C \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{32}x - \frac{3}{128}$$

Równania różniczkowe

Przykład 6.

Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe:

$$y' + y = xe^{2x}$$

Rozwiązanie:

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' + y = 0$

$$y_o = C \cdot e^{-x}$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$:

$$y_s = (Ax + B) \cdot e^{2x}$$

3. Obliczamy y_s':

$$y_s' = A \cdot e^{2x} + (Ax + B) \cdot e^{2x} \cdot 2$$

4. Wstawiamy y_s i y_s' do równania niejednorodnego:

$$(A \cdot e^{2x} + (Ax + B) \cdot e^{2x} \cdot 2) + (Ax + B) \cdot e^{2x} = xe^{2x}$$

Po uproszczeniu przez e^{2x} otrzymamy:

$$A + 2Ax + 2B + Ax + B = x$$

5. Obliczamy współczynniki w y_s, układamy układ równań dla współczynników:
x: $2A + A = 1$, stąd $A = \frac{1}{3}$
1: $A + 2B + B = 0$, stąd $B = -\frac{1}{9}$
6. Zapisujemy rozwiązanie:

$$y = y_o + y_s = C \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) e^{2x}$$

Równania różniczkowe

Metoda przewidywania

UWAGI:

1. Rozwiązanie szczególne y_s nie może zawierać sie w rozwiązaniu ogólnym y_o. Gdyby miało się zawierać, mnożymy y_s przez x.

2. Funkcje $\sin(kx)$ i $\cos(kx)$ w rozwiązaniu szczególnym y_s zawsze występują jednocześnie.

Równania różniczkowe

Przykład 4.a.
Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe:

$$y' + 3y = \cos x$$

Rozwiązanie:

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' + 3y = 0$

$$y_o = C \cdot e^{-3x}$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$ uwzględniając UWAGA 2.:

$$y_s = A\cos x + B\sin x$$

3. Obliczamy y_s':

$$y_s' = -A\sin x + B\cos x$$

4. Wstawiamy y_s i y_s' do równania niejednorodnego:

$$(-A\sin x + B\cos x) + 3\cdot(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$

5. Obliczamy współczynniki w y_s, układamy układ równań dla współczynników:
$\cos x$: $B + 3A = 1$
$\sin x$: $-A + 3B = 0$
Otrzymujemy rozwiązanie: $A = \frac{3}{10}$ i $B = \frac{1}{10}$
6. Zapisujemy rozwiązanie:

$$y = y_o + y_s = C\cdot e^{-3x} + \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

Przykład 7.
Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe:

$$y' - y = e^x$$

z warunkiem początkowym: $y(1) = e$

Przykład 7.
Rozwiąż metodą przewidywania równanie różniczkowe: $y' - y = e^x$ z warunkiem początkowym: $y(1) = e$
Rozwiązanie:

1. Rozwiązujemy równanie jednorodne: $y' - y = 0$

$$y_o = C \cdot e^x$$

2. Przewidujemy y_s tej postaci, co $q(x)$ uwzględniając UWAGA 1.:

$$y_s = Axe^x$$

3. Obliczamy y_s':

$$y_s' = Ae^x + Axe^x$$

4. Wstawiamy y_s i y_s' do równania niejednorodnego:

$$(Ae^x + Axe^x) - (Axe^x) = e^x$$

Po uproszczeniu otrzymamy:

$$Ae^x = e^x$$

5. Obliczamy współczynniki w y_s: $A = 1$
6. Zapisujemy rozwiązanie ogólne:

$$y = y_o + y_s = C \cdot e^x + xe^x$$

7. W tym zadaniu mamy podany warunek początkowy, a więc musimy znaleźć rozwiązanie szczególne:

$$e = C \cdot e^1 + 1 \cdot e^1 = C \cdot e + e$$

Skąd łatwo wyliczyć:

$$C = 0$$

Zatem ostatecznie rozwiązanie zagadnienia ma postać:

$$y = xe^x$$