

Całki potrójne

Współrzędne walcowe

Jeśli rzut obszaru całkowania na płaszczyznę Oxy jest kołem lub jego fragmentem, często wygodniej jest opisać obszar całkowania we współrzędnych walcowych.

$$(x, y, z) \mapsto (r, \varphi, z)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

Całki potrójne

Współrzędne sferyczne

Jeśli obszar całkowania jest kulą lub jej fragmentem, często wygodniej jest opisać obszar całkowania we współrzędnych sferycznych.

$$(x, y, z) \mapsto (r, \varphi, \Theta)$$

$$x = r \cos \varphi \cos \Theta$$

$$y = r \sin \varphi \cos \Theta$$

$$z = r \sin \Theta$$

$$J = r^2 \cos \Theta$$

Całki potrójne

Na koniec porównamy, czy łatwiej jest korzystać ze współrzędnych walcowych czy sferycznych w pewnych przypadkach.

Przykład 7.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

$$3z^2 = x^2 + y^2 \text{ i } z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$$

Ta bryła to przecięcie górnej półkuli i stożka.

Całki potrójne

Przykład 7. cd.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $3z^2 = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania V możemy opisać we współrzędnych walcowych: $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq \sqrt{3 - r^2} \end{cases}$

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3-r^2}} r \cdot dz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left([z]_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3-r^2}} \right) =$$

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \cdot ([\varphi]_0^{2\pi}) = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \cdot (2\pi - 0) = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} \left(r\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr =$$

$$2\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}(3-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}(3 - (\frac{3}{\sqrt{3}})^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} (\frac{3}{\sqrt{3}})^3 - \left(-\frac{1}{3}(3-0^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} 0^3 \right) \right) =$$

$$2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}(3 - \frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} 0^3 \right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 0 \right) =$$

$$2\pi \cdot \left(-\frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \right) = 2\pi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}\pi$$

Całki potrójne

Przykład 7. cd.2.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $3z^2 = x^2 + y^2$ i $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.

Rozwiązanie:

Obszar całkowania V możemy opisać we współrzędnych **sferycznych**: $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \Theta \cdot d\Theta = \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta \cdot d\Theta =$$

$$\left(\left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \right) \cdot \left([\varphi]_0^{2\pi} \right) \cdot \left([\sin \Theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \left(\frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 0 \right) \cdot (2\pi - 0) \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = (\sqrt{3}) \cdot (2\pi) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\pi$$

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

$$F(y', y, x) = 0$$

rozwiązanie: funkcja $y = y(x)$

Równania różniczkowe

Przykład 1.

Sprawdź, czy funkcja: $y = \sqrt{1 + x^2}$
jest rozwiązaniem równania:

$$y \cdot y' - x = 0$$

Rozwiązanie:

Obliczamy pochodną: $y' = (\sqrt{1 + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Wstawiamy y i y' do równania:

$$y \cdot y' - x = \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - x = x - x = 0$$

Równanie jest spełnione, a więc funkcja jest rozwiązaniem tego równania.

Równania różniczkowe

Przykład 1.a.

Łatwo zauważyć, że nie jest to jedyne rozwiązanie równania:

$$y \cdot y' - x = 0$$

Każda funkcja postaci: $y = \sqrt{C + x^2}$ dla dowolnego $C \in \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem tego równania.

Obliczamy pochodną: $y' = (\sqrt{C + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{C+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{C+x^2}}$

Wstawiamy y i y' do równania:

$$y \cdot y' - x = \sqrt{C + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{C + x^2}} - x = x - x = 0$$

Równanie jest spełnione dla każdej funkcji tej postaci, a więc rozwiązania tego równania to pewna rodzina funkcji.

Równania różniczkowe

Rozwiązanie ogólne: rodzina funkcji spełniających równanie.

Rozwiązanie szczególne: jedna funkcja spełniająca równanie i warunek początkowy.

Równania różniczkowe

Przykład 1.b.

Dla równania:

$$y \cdot y' - x = 0$$

Rodzina funkcji postaci: $y = \sqrt{C + x^2}$ dla dowolnego $C \in \mathbb{R}$ to **rozwiązanie ogólne**.

Z tej rodziny można wybrać jedno **rozwiązanie szczególne**,
np. $y = \sqrt{1 + x^2}$

Równania różniczkowe

Zagadnienie początkowe

Zagadnienie Cauchy'ego

Równanie: $F(y', y, x) = 0$

i warunek początkowy: $y_0 = y(x_0)$

Równania różniczkowe

Przykład 1.c.

Dla równania:

$$y \cdot y' - x = 0$$

i warunku początkowego: $y(0) = 1$

Otrzymamy właśnie rozwiązanie szczególne: $y = \sqrt{1 + x^2}$

Obliczenie: w funkcji postaci: $y = \sqrt{C + x^2}$
wstawiamy 0 za x i 1 za y :

$$1 = \sqrt{C + 0^2}$$

$$1 = \sqrt{C}$$

$$C = 1$$

Równania różniczkowe

Krzywe całkowe

wykresy rozwiązań równania

Równania różniczkowe

Przykład 1.d.

Dla równania:

$$y \cdot y' - x = 0$$

krzywe całkowe mają postać: $y = \pm\sqrt{C + x^2}$ co można przekształcić: $x^2 - y^2 = C$

Zatem krzywe całkowe dla tego równania to hiperbole.

Tylko jedna z tych hiperbol przechodzi przez punkt o współrzędnych $(0, 1)$ i jest to rozwiązanie szczególne:

$$y^2 - x^2 = 1$$

Równania różniczkowe

Problem jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego

$$y' = f(x, y)$$

Twierdzenie:

Jeśli funkcja $f(x, y)$ i jej pochodna cząstkowa f_y są ciągłe na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $(x_0, y_0) \in D$, to zagadnienie początkowe:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Równania różniczkowe

Przykład 1.e.

Równanie:

$$y \cdot y' - x = 0$$

Można przedstawić w postaci:

$$y' = \frac{x}{y}$$

Funkcja $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe jeśli $y \neq 0$

Zatem przez punkty o drugiej współrzędnej różnej od zera przechodzi tylko jedna krzywa całkowa tego równania.

W punkcie $(0, 0)$ mamy faktycznie dwie krzywe całkowe spełniające równanie: $y = x$ oraz $y = -x$, a więc dla warunku początkowego $y(0) = 0$ nie mamy jednoznacznego rozwiązania.

Równania różniczkowe

Przykład 2.

Podaj równanie różniczkowe, dla którego krzywe całkowe są okręgami: $x^2 + y^2 = C$

Rozwiązanie:

Różniczkujemy obie strony równania po zmiennej x , pamiętając, że y jest funkcją:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Można to równanie zapisać również w postaci:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale X , a funkcja g jest ciągła i różna od zera w przedziale Y , to przez każdy punkt $(x_0, y_0) \in D = X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ przechodzi lokalnie jednoznaczna krzywa całkowa tego równania $y = y(x)$. Krzywa ta jest obrazem w obszarze D równania $G(y) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$ gdzie F i G są funkcjami pierwotnymi dla funkcji odpowiednio f i g .

Równania różniczkowe

Równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Metoda rozwiązywania:

1. zamieniamy: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$
2. rozdzielamy zmienne: $g(y)dy = f(x)dx$
3. całkujemy obustronnie: $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

Równania różniczkowe

Przykład 3.

Równanie $y' = \frac{x}{y}$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych i możemy rozwiązać je podanym sposobem.

Rozwiązanie:

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

UWAGA: zwyczajowo stałą całkowania C umieszczamy tylko po jednej stronie, tej, gdzie całkowaliśmy po "x", to upraszcza późniejsze rachunki.

$$y = \pm \sqrt{x^2 + 2C}$$

UWAGA: warto robić sprawdzenie rozwiązania!!!

Równania różniczkowe

Przykład 4.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = \sqrt{xy}$$

z warunkiem początkowym: $y(1) = 4$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{x} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{x} \cdot dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}C_1$$

Otrzymujemy rozwiązanie ogólne:

$$y = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$$

Równania różniczkowe

Znajdujemy rozwiązanie szczególne korzystając z warunku początkowego $y(1) = 4$

$$4 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C\right)^2$$

$$2 = \frac{1}{3} + C$$

$$C = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Zatem rozwiązanie szczególne dla tego zagadnienia to:

$$y = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}\right)^2$$

Równania różniczkowe

Równanie nie musi zawierać zmiennej x ani y .

Przykład 5.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = 3$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

$$dy = 3dx$$

$$\int dy = \int 3dx$$

$$y = 3x + C$$

Równania różniczkowe

Przykład 6.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' - 5y = 0$$

Rozwiązanie:

$$\frac{dy}{dx} = 5y$$

$$\frac{dy}{y} = 5dx$$

UWAGA: wszelkie współczynniki lepiej zostawiać po stronie z dx , to ułatwia późniejsze rachunki.

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx$$

$$\ln |y| = 5x + C_1$$

Wyliczamy y

$$y = e^{(5x+C_1)}$$

$$y = e^{5x} \cdot e^{C_1}$$

Zamiast e^{C_1} , które jest stałe, przyjmujemy dowolną stałą C :

$$y = Ce^{5x}$$

Równania różniczkowe

UWAGA!

Nie każde równanie różniczkowe jest równaniem o rozdzielonych zmiennych.

Przykłady:

$$y' = \sqrt{x + y}$$

$$y' = (x + 4y + 3)^2$$

$$y' = \cos(x - y)$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

W niektórych przypadkach możemy stosując specjalne podstawienie sprowadzić równanie do równania o zmiennych rozdzielonych.

Równania różniczkowe

Podstawienia sprowadzające równanie różniczkowe do równania o zmiennych rozdzielonych

1. $y' = f(a \cdot x + b \cdot y + c), a, b, c \in R$

podstawienie: $u = a \cdot x + b \cdot y + c$

wtedy:

$$u' = a + b \cdot y'$$

2. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

podstawienie: $u = \frac{y}{x}$

wtedy:

$$u \cdot x = y$$

$$u' \cdot x + u = y'$$

Równania różniczkowe

Przykład 7.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = (x + 4y + 3)^2$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy podstawienie: $u = x + 4y + 3$

Różniczkujemy obie strony po zmiennej x : $u' = 1 + 4y'$

Stąd wyliczamy $y' = \frac{1}{4}(u' - 1)$

Po podstawieniu do równania otrzymamy równanie o rozdzielonych zmiennych, które rozwiążemy ze względu na $u = u(x)$:

$$\frac{1}{4}(u' - 1) = u^2$$

$$u' = 1 + 4u^2$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + 4u^2$$

$$\frac{du}{1 + 4u^2} = dx$$

$$\int \frac{du}{1 + 4u^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(2u) = x + C_1$$

Równania różniczkowe

Stąd wyliczamy u :

$$\arctg(2u) = 2x + 2 \cdot C_1$$

$$2u = \operatorname{tg}(2x + C)$$

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + C)$$

Zastępujemy u przez $x + 4y + 3$

$$x + 4y + 3 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(2x + C)$$

Wyliczamy y

$$y = \frac{1}{8} \operatorname{tg}(2x + C) - \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

Równania różniczkowe

Przykład 8.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = \cos(x - y)$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy podstawienie: $u = x - y$

Różniczkujemy obie strony po zmiennej x : $u' = 1 - y'$

Stąd wyliczamy $y' = 1 - u'$

Podstawiamy do równania:

$$1 - u' = \cos u$$

$$u' = 1 - \cos u$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - \cos u$$

$$\frac{du}{1 - \cos u} = dx$$

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \int dx$$

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = x + C$$

$$\frac{u}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(x + C)$$

$$u = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(x + C)$$

$$x - y = 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(x + C)$$

$$y = x - 2 \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(x + C)$$

Równania różniczkowe

Przykład 9.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

Rozwiązanie:

Zastosujemy podstawienie: $u = \frac{y}{x}$

Przekształcamy: $y = u \cdot x$ i różniczkujemy obie strony po zmiennej x : $y' = u' \cdot x + u \cdot 1$

Po podstawieniu do równania otrzymamy równanie o rozdzielonych zmiennych, które rozwiązujemy ze względu na $u = u(x)$:

$$u'x + u = u + e^u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = e^u$$

$$e^{-u} \cdot du = \frac{dx}{x}$$

$$\int e^{-u} \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-e^{-u} = \ln|x| + C_1$$

$$e^{-u} = -\ln|x| - C_1$$

$$-u = \ln|C - \ln|x||$$

$$u = -\ln|C - \ln|x||$$

Równania różniczkowe

Zastępujemy u przez $\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = -\ln |C - \ln |x||$$

Wyliczamy y

$$y = -x \cdot \ln |C - \ln |x||$$

Równania różniczkowe

Przykład 10.

Rozwiąż równanie różniczkowe:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

Rozwiązanie:

Równanie można przekształcić do postaci:

$$y' = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

Zastosujemy podstawienie: $u = \frac{y}{x}$

Przekształcamy: $y = u \cdot x$ i różniczkujemy obie strony po zmiennej x : $y' = u' \cdot x + u \cdot 1$

Podstawiamy do równania:

$$u'x + u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + u \right)$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + u \right) - u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1 - u^2}{2u}$$

$$\frac{2u}{1 - u^2} \cdot du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2u}{1 - u^2} \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

Równania różniczkowe

$$-\ln|1 - u^2| = \ln|x| + C_1$$

$$\ln|1 - u^2| = -\ln|x| - C_1$$

$$1 - u^2 = e^{(-\ln|x| - C_1)}$$

$$1 - u^2 = e^{-\ln|x|} \cdot e^{-C_1}$$

$$1 - u^2 = \frac{1}{x} \cdot C$$

Zastępujemy u przez $\frac{y}{x}$

$$1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{x} \cdot C$$

Wyliczamy y

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 - \frac{C}{x}$$

$$y = x \cdot \sqrt{1 - \frac{C}{x}}$$

$$y = \sqrt{x^2 - Cx}$$