

# Całki potrójne

## Całka potrójna

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

# Całki potrójne

## Całka potrójna Riemanna

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) (\Delta x_k) (\Delta y_k) (\Delta z_k)$$

# Całki potrójne

## Obszar normalny względem płaszczyzny $Oxy$

Niech  $G$  - rzut obszaru  $V$  na płaszczyznę  $Oxy$  - będzie pewnym obszarem płaskim regularnym i domkniętym, niech istnieją funkcje  $g(x, y)$  i  $h(x, y)$  takie, że:

$$V = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

wtedy  $V$  nazywamy **obszarem normalnym względem płaszczyzny  $Oxy$** .

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz$$

# Całki potrójne

## Własności całki potrójnej

$$1. |V| = \iiint_V dx dy dz$$

$$2. \iiint_V k \cdot f(x, y, z) dx dy dz = k \cdot \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

$$3. \iiint_V [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] dx dy dz = \\ \iiint_V f_1(x, y, z) dx dy dz + \iiint_V f_2(x, y, z) dx dy dz$$

$$4. \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ \iiint_{V_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

jeśli  $V = V_1 \cup V_2$  oraz  $V_1$  i  $V_2$  nie mają wspólnych punktów wewnętrznych.

# Całki potrójne

## Własności całki potrójnej

5. Jeśli w obszarze  $V$  zachodzi  $m \leq f(x, y, z) \leq M$ , to

$$m \cdot |V| \leq \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \leq M \cdot |V|$$

## Twierdzenie (o średniej całkowej):

Jeśli  $f$  jest ciągła w  $V$ , to istnieje wewnątrz tego obszaru punkt  $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , w którym funkcja przyjmuje wartość średniej całkowej:

$$f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{|V|} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

# Całki potrójne

## Powierzchnie

1.  $Ax + By + Cz + D = 0$  płaszczyzna
2.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  sfera
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  elipsoida
4.  $z = x^2 + y^2$  lub  $z = A - x^2 - y^2$  paraboloida
5.  $z^2 = x^2 + y^2$  lub  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  stożek
6. walec (jeśli brakuje jednej ze współrzędnych)  
 $x^2 + y^2 = R^2$  walec obrotowy;  $y^2 = 2px$  walec paraboliczny;  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  walec hiperboliczny

# Całki potrójne

## Przykład 1.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = 3$

### Rozwiązanie:

Bryła jest ograniczona walcem hiperbolicznym i dwiema płaszczyznami.

Połówę bryły można opisać:  $\frac{1}{2}V = \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - 1} \\ 0 \leq z \leq 3 - x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|V| &= \iiint_V dx dy dz = \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{x^2-1}} dy \int_0^{3-x} dz = \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{x^2-1}} dy \cdot ([z]_0^{3-x}) = \\ &= \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{x^2-1}} dy \cdot (3-x-0) = \int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{x^2-1}} (3-x) dy = \int_1^3 (3-x) dx \cdot ([y]_0^{\sqrt{x^2-1}}) = \\ &= \int_1^3 (3-x) dx \cdot (\sqrt{x^2-1}-0) = \int_1^3 (3-x)\sqrt{x^2-1} dx = \left[ \frac{3}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| - \frac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \\ &= \frac{3}{2} \cdot 3\sqrt{3^2-1} - \frac{3}{2}\ln|3+\sqrt{3^2-1}| - \frac{1}{3}(3^2-1)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{3}{2} \cdot 1\sqrt{1^2-1} - \frac{3}{2}\ln|1+\sqrt{1^2-1}| - \frac{1}{3}(1^2-1)^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{9}{2} \cdot \sqrt{8} - \frac{3}{2}\ln|3+\sqrt{8}| - \frac{1}{3}(8)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2}\ln|1+\sqrt{0}| + \frac{1}{3}(0)^{\frac{3}{2}} = 9\sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln|3+\sqrt{8}| - \frac{16}{3}\sqrt{2} = \\ &= \frac{11}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln|3+\sqrt{8}| \approx 2,54 \\ |V| &= 2 \cdot \left( \frac{11}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{2}\ln|3+\sqrt{8}| \right) = \frac{22}{3}\sqrt{2} - 3\ln|3+\sqrt{8}| \approx 5,08 \end{aligned}$$

# Całki potrójne

## Współrzędne walcowe

Jeśli rzut obszaru całkowania na płaszczyznę  $Oxy$  jest kołem lub jego fragmentem, często wygodniej jest opisać obszar całkowania we współrzędnych walcowych.

$$(x, y, z) \mapsto (r, \varphi, z)$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$J = r$$

# Całki potrójne

## Jakobian

Współczynnik, przez który mnożymy całkę zmieniając współrzędne.

Wprowadził go niemiecki matematyk Carl Gustaw Jacobi.

Zamiana:  $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

# Całki potrójne

## Przykład 2.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  i  $z = 2 - x^2 - y^2$ .

## Rozwiązanie:

Bryła to przecięcie stożka i paraboloidy. Najpierw szukamy współrzędnej  $z$ , dla której powierzchnie się przetną:  
 $z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - z^2$ , po uporządkowaniu:  $z^2 + z - 2 = 0$ , równanie ma dwa pierwiastki:  $z_1 = -2$  i  $z_2 = 1$ . Warunki zadania wymagają, żeby  $z > 0$ , zatem powierzchnie przecinają się dla  $z = 1$ .

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych walcowych:  $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ r \leq z \leq 2 - r^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^{2-r^2} r \cdot dz = \int_0^1 r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot ([z]_r^{2-r^2}) = \int_0^1 r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (2 - r^2 - r) = \\ &= \int_0^1 r(2 - r^2 - r) \cdot dr \cdot ([\varphi]_0^{2\pi}) = \int_0^1 (2r - r^3 - r^2) \cdot dr \cdot (2\pi - 0) = 2\pi \cdot \int_0^1 (2r - r^3 - r^2) \cdot dr = \\ &= 2\pi \cdot [r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3]_0^1 = 2\pi \cdot (1^2 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0) = 2\pi \cdot (1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = 2\pi \cdot \frac{12-3-4}{12} = \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

# Całki potrójne

Czasem może być potrzeba, by zmodyfikować współrzędne walcowe, bo ośią bryły będzie inna oś niż  $Oz$ :

## Przykład 3.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:  $x^2 + z^2 = 4$ ,  $y = 0$  i  $y + z = 6$

## Rozwiązanie:

Bryła to fragment walca obrotowego wokół osi  $Oy$  wycięta płaszczyznami  $y = 0$  i  $y + z = 6$ .

Modyfikujemy współrzędne walcowe:

$$x = r \cos \varphi$$

$$z = r \sin \varphi$$

$$y = y$$

$$J = r$$

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych walcowych:  $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq y \leq 6 - r \sin \varphi \end{cases}$

$$\begin{aligned} |V| &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{6-r \sin \varphi} r \cdot dy = \int_0^2 r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot ([y]_0^{6-r \sin \varphi}) = \\ &= \int_0^2 r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot (6 - r \sin \varphi) = \int_0^2 r \cdot dr \cdot ([6 \cdot \varphi + r \cos \varphi]_0^{2\pi}) = \int_0^2 r \cdot dr \cdot (6 \cdot 2\pi + r \cos(2\pi) - (6 \cdot 0 + r \cos 0)) = \\ &= \int_0^2 r \cdot dr \cdot (12\pi + r - 0 - r) = 12\pi \cdot \int_0^2 r \cdot dr = 12\pi \cdot [\frac{1}{2} r^2]_0^2 = 12\pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0) = 24\pi \end{aligned}$$

# Całki potrójne

## Współrzędne sferyczne

Jeśli obszar całkowania jest kulą lub jej fragmentem, często wygodniej jest opisać obszar całkowania we współrzędnych sferycznych.

$$(x, y, z) \mapsto (r, \varphi, \Theta)$$

$$x = r \cos \varphi \cos \Theta$$

$$y = r \sin \varphi \cos \Theta$$

$$z = r \sin \Theta$$

$$J = r^2 \cos \Theta$$

**UWAGA:** Współrzędne sferyczne można definiować na kilka sposobów. W niektórych podręcznikach mogą być nieco inne wzory.

## Całki potrójne

Obliczmy jacobian dla współrzędnych sferycznych:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \Theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \Theta & -r \sin \varphi \cos \Theta & -r \cos \varphi \sin \Theta \\ \sin \varphi \cos \Theta & r \cos \varphi \cos \Theta & -r \sin \varphi \sin \Theta \\ \sin \Theta & 0 & r \cos \Theta \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= r^2 \cos^2 \varphi \cos^3 \Theta + 0 + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta \cos \Theta + \\ &+ r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \Theta \cos \Theta - 0 + r^2 \sin^2 \varphi \cos^3 \Theta = \\ &= r^2 \cos^3 \Theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \Theta \cos \Theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= r^2 \cos^3 \Theta + r^2 \sin^2 \Theta \cos \Theta = \\ &= r^2 \cos \Theta (\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta) = \\ &= r^2 \cos \Theta \end{aligned}$$

# Całki potrójne

## Przykład 4.

Oblicz całkę:  $\iiint_V x dx dy dz$ , gdzie  $V$  dodatnia część kuli o promieniu 1,

czyli bryła spełniająca warunki:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$

## Rozwiązanie:

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych sferycznych:  $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\iiint_V x dx dy dz = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi \cos \Theta) \cdot (r^2 \cos \Theta) \cdot d\Theta = \int_0^1 r^3 \cdot dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \cdot d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \Theta \cdot d\Theta =$$

$$\left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_0^1 \cdot \left[ \sin \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{2} \Theta + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \Theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left( \frac{1}{4} 1^4 - 0 \right) \cdot (\sin(\frac{\pi}{2}) - \sin 0) \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - \left( \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \sin(2 \cdot 0) \right) \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(\pi) - 0 + \frac{1}{4} \sin(0) \right) = \frac{\pi}{16}$$

## Całki potrójne

### Zastosowania:

Masa bryły  $V$  o gęstości  $\rho(x, y, z)$ :

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Współrzędne środka masy  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$x_0 = \frac{1}{m} \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$y_0 = \frac{1}{m} \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_V z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

# Całki potrójne

## Zastosowania:

Moment bezwładności:

$$B = \iiint_V [d(x, y, z)]^2 \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

gdzie  $d(x, y, z)$  odległość od osi/punktu, względem którego liczymy moment bezwładności.

# Całki potrójne

## Zastosowania:

Pole płata (części powierzchni  $z = f(x, y)$  nad obszarem  $G$ ):

$$|S| = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

# Całki potrójne

## Przykład 5.

Korzystając z przykładu 4. możemy obliczyć współrzędne środka masy jednorodnej dodatniej części kuli o promieniu 1, czyli bryły spełniającej warunki:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$

## Rozwiązanie:

Skoro bryła jest jednorodna, to jej gęstość jest stała:  $\rho(x, y, z) = \rho$ .

Masa bryły jednorodnej:  $m = \rho \cdot |V| = \rho \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi = \frac{1}{6} \pi \rho$

Współrzędne środka masy:  $x_0 = \frac{1}{m} \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{\frac{1}{6} \pi \rho} \cdot \rho \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{3}{8}$

Z symetrii bryły wynika, że  $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{3}{8}$

# Całki potrójne

## Przykład 6.

Oblicz moment bezwładności  $B_z$  względem osi  $Oz$  jednorodnej bryły opisanej warunkami:  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ ,  $0 \leq z \leq 5$ .

## Rozwiązanie:

Dla tej bryły mamy:  $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$  zatem moment bezwładności policzymy ze wzoru:

$$B_z = \int \int \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dx dy dz$$

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych walcowych:  $V = \begin{cases} 2 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases}$

$$B_z = \int \int \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho \cdot dx dy dz = \int_2^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 r^2 \cdot r \cdot \rho \cdot dz = \rho \cdot \int_2^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 dz = \rho \cdot \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_2^3 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [z]_0^5 = \rho \cdot \left( \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 2^4 \right) \cdot (2\pi - 0) \cdot (5 - 0) = \rho \cdot \frac{65}{4} \cdot 2\pi \cdot 5 = \frac{325}{2} \pi \rho$$

## Całki potrójne

Na koniec porównamy, czy łatwiej jest korzystać ze współrzędnych walcowych czy sferycznych w pewnych przypadkach.

### **Przykład 7.**

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

$$3z^2 = x^2 + y^2 \text{ i } z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$$

Ta bryła to przecięcie górnej półkuli i stożka.

# Całki potrójne

## Przykład 7. cd.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:  $3z^2 = x^2 + y^2$  i  $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ .

## Rozwiązanie:

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych walcowych:  $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq \frac{3}{\sqrt{3}} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{r}{\sqrt{3}} \leq z \leq \sqrt{3 - r^2} \end{cases}$

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3-r^2}} r \cdot dz = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left( [z]_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3-r^2}} \right) =$$

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left( \sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left( \sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left( \sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \cdot ([\varphi]_0^{2\pi}) = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} r \cdot \left( \sqrt{3-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr \cdot (2\pi - 0) = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} \left( r\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{3}} \right) \cdot dr =$$

$$2\pi \cdot \left[ -\frac{1}{3}(3-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\frac{3}{\sqrt{3}}} = 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3}(3 - (\frac{3}{\sqrt{3}})^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} (\frac{3}{\sqrt{3}})^3 - \left( -\frac{1}{3}(3-0^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} 0^3 \right) \right) =$$

$$2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3}(3 - \frac{9}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} 0^3 \right) = 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{9}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 0 \right) =$$

$$2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \right) = 2\pi \cdot \left( -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8} + \sqrt{3} \right) = 2\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}\pi$$

# Całki potrójne

## Przykład 7. cd.2.

Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:  $3z^2 = x^2 + y^2$  i  $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ .

## Rozwiązanie:

Obszar całkowania  $V$  możemy opisać we współrzędnych **sferycznych**:  $V = \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \frac{\pi}{6} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$|V| = \iiint_V dx dy dz = \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \Theta \cdot d\Theta = \int_0^{\sqrt{3}} r^2 \cdot dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \Theta \cdot d\Theta =$$

$$\left( \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{\sqrt{3}} \right) \cdot \left( [\varphi]_0^{2\pi} \right) \cdot \left( [\sin \Theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \left( \frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 0 \right) \cdot (2\pi - 0) \cdot \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = (\sqrt{3}) \cdot (2\pi) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\pi$$