

Rachunek prawdopodobieństwa

Zmienna losowa X to funkcja przyporządkowująca zdarzeniu elementarnemu liczby rzeczywiste:

$$X : \Omega \rightarrow R$$

Przykłady:

1. liczba oczek wyrzucona na kostce do gry;
2. suma oczek wyrzucona na dwóch kostkach do gry;
3. iloczyn liczby oczek wyrzuconych na dwóch kostkach do gry;
4. wartość karty wylosowanej z talii kart do gry (figurom można nadać wartości 11, 12 i 13);
5. data (dzienna);
6. wiek wylosowanej osoby;
7. temperatura w danej chwili w wybranym miejscu na Ziemi.

Rachunek prawdopodobieństwa

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X to przyporządkowanie podzbiorem B zbioru R prawdopodobieństwa, że zmienna X przyjmie wartość ze zbioru $B \subseteq R$:

$$P_X(B) = P(X \in B)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 1:

Niech zmienna losowa X oznacza liczbę oczek wyrzuconych na kostce do gry.

Wtedy rozkład zmiennej losowej można przedstawić tabelą:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Z tabeli można odczytać prawdopodobieństwa:

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 0) = 0$$

$$P(X < 3) = \frac{2}{6}$$

$$P(X \geq 4) = \frac{3}{6}$$

$$P(1 < X \leq 5) = \frac{4}{6}$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 2:

Niech zmienna losowa Y oznacza iloczyn liczby oczek wyrzuconych na dwóch kostkach do gry.

Wtedy rozkład zmiennej losowej Y można przedstawić tabelą:

k	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16
$P(Y = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

k	18	20	24	25	30	36
$P(Y = k)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Rachunek prawdopodobieństwa

Dystrybucją zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F : R \rightarrow R$ określoną wzorem:

$$F(x) = P(X < x) = P((-\infty, x))$$

dla $x \in R$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 1 cd.:

Dystrybuanta zmiennej losowej X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6} & 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{6} & 3 < x \leq 4 \\ \frac{4}{6} & 4 < x \leq 5 \\ \frac{5}{6} & 5 < x \leq 6 \\ 1 & 6 < x \end{cases}$$

UWAGA: Trzeba odróżniać małe x od dużego X . Duże X oznacza zmienną losową, małe x oznacza liczbę rzeczywistą, której wartość zmiennej losowej może być równa.

Rachunek prawdopodobieństwa

Własności dystrybuanty:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. F jest funkcją niemalejącą i lewostronnie ciągłą
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Dystrybuanta zmiennej losowej wyznacza jednoznacznie jej rozkład:

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

dla $a < b$

Rachunek prawdopodobieństwa

Zmienna losowa jest **skokowa (dyskretna)** jeśli może przyjmować skończenie wiele wartości lub przeliczalnie wiele wartości.

Skokową zmienną losową często określamy za pomocą **funkcji prawdopodobieństwa**:

$$P(X = x_k) = p_k$$

gdzie $p_k > 0$ oraz $\sum_i p_i = 1$

wtedy jej dystrybuanta:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) = \sum_{x_i < x} p_i$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Zmienna losowa jest **ciągła** jeśli może przyjmować wszystkie wartości z pewnego przedziału (skończonego lub nie).

Wtedy jej dystrybuanta może być przedstawiona wzorem:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

gdzie $x \in R$

Funkcja $f(x)$ określona na R to funkcja **gęstości** prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Rachunek prawdopodobieństwa

Własności gęstości:

1. $f(x) \geq 0$ dla $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
3. jeśli $f(x)$ jest ciągła, to $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
dla $x_2 > x_1$, zatem:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Wartość oczekiwana zmiennej losowej X
oznaczana EX lub m

- dla zmiennej skokowej:

$$EX = \sum_i x_i p_i$$

- dla zmiennej ciągłej:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Wartość oczekiwana bywa też nazywana wartością średnią, wartością przeciętną lub nadzieją matematyczną.

Wartość oczekiwana wyznacza środek ciężkości masy jednostkowej rozłożonej w punktach skokowych.

Rachunek prawdopodobieństwa

Moment rzędu k zmiennej losowej X oznaczamy m_k , jest równy wartości oczekiwanej zmiennej losowej X^k .

$$m_k = EX^k$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Wariancja zmiennej losowej X oznaczana D^2X lub σ^2

$$D^2X = EX^2 - [EX]^2 = E[X - EX]^2 = m_2 - m_1^2$$

Wariancja jest miarą rozrzutu wartości zmiennej losowej.

Rachunek prawdopodobieństwa

Odchylenie standardowe zmiennej losowej X
oznaczane DX lub σ

$$DX = \sqrt{D^2 X}$$

Odchylenie standardowe jest miarą odchylenia zmiennej losowej od jej wartości średniej.

Rachunek prawdopodobieństwa

Moment centralny rzędu k zmiennej losowej X oznaczany μ_k

$$\mu_k = E[X - EX]^k$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 3. (zadanie z kolokwium z zeszłego roku)

Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa podany w tabeli:

k	-4	-2	0	1	3
$P(X = k)$	0,2	0,1	a	0,2	0,3

Wyznacz wartość a , dystrybuantę zmiennej X , jej wartość oczekiwaną oraz wariancję.

Rozwiązanie:

Suma prawdopodobieństw musi wynosić 1, a więc $a = 1 - (0,2 + 0,1 + 0,2 + 0,3) = 0,2$

Wartość oczekiwana $EX = (-4) \cdot 0,2 + (-2) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 = 0,1$

Aby obliczyć wariancję najpierw liczymy $EX^2 = (-4)^2 \cdot 0,2 + (-2)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,3 = 6,2$

Zatem wariancja $D^2X = EX^2 - [EX]^2 = 6,2 - (0,1)^2 = 6,2 - 0,01 = 6,19$

Dystrybuenta zmiennej losowej X :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -4 \\ 0,2 & -4 < x \leq -2 \\ 0,3 & -2 < x \leq 0 \\ 0,5 & 0 < x \leq 1 \\ 0,7 & 1 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 4.

Dla jakich wartości parametrów A , B , C i D funkcja $F(x)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej?

$$F(x) = \begin{cases} A & x \leq 0 \\ Bx^2 & 0 < x \leq 1 \\ C(2-x) + 1 & 1 < x \leq 2 \\ D & 2 < x \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Korzystając z własności dystrybuanty $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, a więc $A = 0$

Podobnie skoro $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ to $D = 1$

Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą i lewostronnie ciągłą, zatem $B \geq 0$

Dla $x = 1$ powinno być $B \cdot 1^2 \leq C(2-1) + 1$, czyli $B \leq C + 1$

Podobnie dla $x = 2$ powinno być $C(2-2) + 1 \leq D$, ale to nie nakłada ograniczeń na żaden z parametrów.

Skoro funkcja ma być niemalejąca, czyli wyrażenie $C(2-x) + 1$ ma oznaczać funkcję niemalejącą, to $C \leq 0$.

Stąd ostatecznie: $A = 0$, $0 \leq B \leq 1$, $B - 1 \leq C \leq 0$ i $D = 1$.

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 5.

Dla jakiej wartości parametru C funkcja $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej?

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x & x \in (0, 1) \\ 0 & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Korzystając z własności gęstości: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

Zatem musi być: $\int_{-\infty}^{\infty} (C \cdot x) dx = \int_0^1 (C \cdot x) dx = [\frac{1}{2} C \cdot x^2]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot C = 1$, czyli $C = 2$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 5 cd.

Dla zmiennej losowej z przykładu 5. podaj jej gęstość, wartość oczekiwaną i wariancję.

Oblicz prawdopodobieństwo $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$

Rozwiązanie:

Z definicji $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, zatem dla $x \leq 0$ mamy $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

Dla $0 < x \leq 1$ mamy $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^x (2t)dt = [t^2]_0^x = x^2$

Dla $1 < x$ mamy $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_0^1 2tdt = [t^2]_0^1 = 1$

Zatem ostatecznie dystrybuanta zmiennej losowej X przyjmuje postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ x^2 & x \in (0, 1) \\ 1 & x \notin (1, \infty) \end{cases}$$

Wartość oczekiwana: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot f(x))dx = \int_0^1 (2x^2)dx = [\frac{2}{3}t^3]_0^1 = \frac{2}{3}$

Aby obliczyć wariancję najpierw liczymy $EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 \cdot f(x))dx = \int_0^1 (2x^3)dx = [\frac{2}{4}t^4]_0^1 = \frac{1}{2}$

Zatem wariancja: $D^2 X = EX^2 - [EX]^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$

Prawdopodobieństwo, że wartość zmiennej losowej jest z pewnego przedziału można obliczyć całkując gęstość po tym przedziale:

$$P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(t)dt = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} (2t)dt = [t^2]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Przykład 6.

Sprawdź, że istnieje zmienna losowa X o gęstości $f(x)$. Oblicz jej wartość oczekiwaną.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Aby funkcja $f(x)$ była gęstością zmiennej losowej musi być spełniony warunek: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

$$\text{W tym przypadku } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{1}{x^2} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^h = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{h} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 1$$

Warunek jest spełniony, zatem istnieje zmienna losowa X , której gęstość jest równa funkcji $f(x)$.

Wartość oczekiwana:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot f(x)) dx = \int_1^{\infty} \left(x \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_1^h \frac{1}{x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} [\ln x]_1^h = \lim_{h \rightarrow \infty} (\ln h - \ln 1) = \infty$$

Zatem wartość oczekiwana zmiennej losowej X nie istnieje.