Matematyka 3

dr inż. Monika Pszczoła

monika.pszczola@wat.edu.pl

pokój 222/65

Plan wykładu:

- Prawdopodobieństwo. Rozkłady zmiennych losowych.
- Całki podwójne i potrójne.
- Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego i drugiego rzędu.

Literatura podstawowa

- R. Leitner, *Zarys matematyki wyższej, część I i II*, 1994
- R. Leitner, J. Zacharski, *Zarys matematyki wyższej, część III*, 1994
- J. Gawinecki, *Matematyka dla informatyków, część I i II*, 2003
- M. Cieciura, J. Zacharski, *Metody probabilistyczne w ujęciu praktycznym* 2007
- L. Kowalski *Statystyka* 2005
- R. Leitner, M. Matuszewski, Z. Rojek, *Zadania z matematyki wyższej, część I i II*, 1998
- W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część I i II*, 2002

Literatura uzupełniająca

- A. Plucińska, E. Pluciński *Probabilistyka* 2000
- W. Leksiński, J. Nabiałek, W. Żakowski, *Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady, zadania*, 1992
- W. Krysicki, J. Bartos, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach, część I i II*, 1999
- W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część I*, 1995
- W. Stankiewicz, J. Wojtowicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część II*, 1995
- H. Łubowicz, B. Wieprzkowicz, *Matematyka. Podstawowe wiadomości teoretyczne i ćwiczenia dla studentów studiów inżynierskich*, 2006

Literatura uzupełniająca

- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 (definicje, twierdzenia, wzory), OW GiS*, 2012
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 (przykłady i zadania), OW GiS*, 2012
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne (definicje, twierdzenia, wzory), OW GiS*, 203
- M. Gewert, Z. Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne (przykłady i zadania), OW GiS*, 2003
- W. Kordecki, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna (definicje, twierdzenia, wzory), OW GiS*, 203
- H. Jasiulewicz, W. Kordecki, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna (przykłady i zadania), OW GiS*, 2003
- strona internetowa: http://statystyka.rezolwenta.eu.org/

Rachunek prawdopodobieństwa

Przestrzeń probabilistyczna (Ω, S, P)

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych

S - zbiór zdarzeń losowych (w praktyce podzbiory Ω)

P - funkcja prawdopodobieństwa (przyporządkowuje zdarzeniom prawdopodobieństwo ich zajścia)

$$P : S \to R$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Zdarzenie elementarne $\omega \in A$ to zdarzenie **sprzyjające** dla A.

Zdarzenie losowe $A \in S$ to zbiór tych zdarzeń elementarnych, które mu sprzyjają, zatem $A \subseteq \Omega$.

Rachunek prawdopodobieństwa

Zdarzenia losowe są zbiorami, a więc możemy zdefiniować na nich działania:

suma zdarzeń: $A \cup B$

iloczyn zdarzeń: $A \cap B$

różnica zdarzeń: $A \setminus B$

zdarzenie przeciwne do zdarzenia A: $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Rachunek prawdopodobieństwa

Zdarzenie A **pociąga** zdarzenie B jeśli $A \subseteq B$.

Jeśli $A \cap B = \emptyset$, to zdarzenia **są rozłączne** (wykluczają się).

Rachunek prawdopodobieństwa

Rodzina zbiorów S jest σ**-ciałem** jeśli spełnione są warunki:

1. $\Omega \in S$

2. Jeśli $A \in S$, to $\overline{A} \in S$

3. Jeśli $A_i \in S$ dla $i = 1, 2, \ldots$, to $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$

Rachunek prawdopodobieństwa

Aksjomaty prawdopodobieństwa

I. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in S$

II. $P(\Omega) = 1$

III. Dla każdego ciągu $A_i \in S$ dla $i = 1, 2, \ldots$ zdarzeń parami rozłącznych ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Twierdzenie 1
Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego wynosi 0.

$$P(\emptyset) = 0$$

UWAGA: Z tego, że $P(A) = 0$ nie wynika, że zdarzenie A jest niemożliwe.

Twierdzenie 2
Prawdopodobieństwo jest funkcją addytywną:
Dla każdego ciągu $A_i \in S$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ zdarzeń parami rozłącznych ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) zachodzi:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Twierdzenie 3
Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Twierdzenie 4
Dla dowolnych zdarzeń $A, B \in S$ zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Twierdzenie 5
Jeśli $A \subseteq B$ to zachodzi:

$$P(A) \leqslant P(B)$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Twierdzenie 6
Dla każdego zdarzenia $A \in S$ zachodzi:

$$P(A) \leqslant 1$$

Rachunek prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa
Jeśli zbiór zdarzeń elementarnych Ω ma skończenie wiele elementów, i każde zdarzenie elementarne jest jednakowo możliwe, to:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A to iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Rachunek prawdopodobieństwa

- **Permutacje** zbioru n-elementowego to ciągi wszystkich jego elementów (ważna kolejność). $P_n = n!$
- **Wariacje bez powtórzeń** k-elementowe ze zbioru n-elementowego to ciągi wybranych k jego elementów ($k \leqslant n$) (ważna kolejność). $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **Wariacje z powtórzeniami** k-elementowe ze zbioru n-elementowego to ciągi wybranych k jego elementów (ważna kolejność). $W_n^k = n^k$
- **Kombinacje** (bez powtórzeń) k-elementowe ze zbioru n-elementowego to zbiory wybranych k jego elementów ($k \leqslant n$) (kolejność nie jest ważna). $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$